SET – 3

Series : SSO/C

कोड नं.
Code No. **65/3**

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **8** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जायेगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **8** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **26** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित
MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे] *[अधिकतम अंक : 100*
*Time allowed : **3** hours]* *[Maximum Marks : **100***

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं ।*

(iii) *खण्ड-**अ** के प्रश्न **1–6** तक अति लघु-उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **1** अंक निर्धारित है ।*

(iv) *खण्ड-**ब** के प्रश्न **7–19** तक दीर्घ-उत्तर **I** प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **4** अंक निर्धारित हैं ।*

(v) *खण्ड-**स** के प्रश्न **20–26** तक दीर्घ-उत्तर **II** प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **6** अंक निर्धारित हैं ।*

(vi) *उत्तर लिखना प्रारंभ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।*

QB365 - Question Bank Software

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *Please check that this Question Paper contains **26** Questions.*

(iii) *Questions **1** to **6** in Section-**A** are Very Short Answer Type Questions carrying **one** mark each.*

(iv) *Questions **7** to **19** in Section-**B** are Long Answer **I** Type Questions carrying **4** marks each.*

(v) *Questions **20** to **26** in Section-**C** are Long Answer **II** Type Questions carrying **6** marks each*

(vi) *Please write down the serial number of the Question before attempting it.*

खण्ड – अ
SECTION – A

प्रश्न संख्या **1** से **6** तक प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है ।

Question numbers **1** to **6** carry **1** mark each.

1. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = x^3 e^{-2y}$ का हल ज्ञात कीजिए । **1**

Find the solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = x^3 e^{-2y}$.

2. अवकल समीकरण $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} + y = e^{-2\sqrt{x}}$ का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए । **1**

Write the integrating factor of the differential equation $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} + y = e^{-2\sqrt{x}}$.

3. सदिश $3\vec{a} + 2\vec{b}$ के दिक् अनुपात लिखिए जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ हैं । **1**

Write the direction ratio's of the vector $3\vec{a} + 2\vec{b}$ where $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$.

4. सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए । **1**

Find the projection of the vector $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ on the vector $\vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$.

5. बिंदु (1, 2, 3) से होकर जाने वाली उस रेखा का सदिश समीकरण लिखिए जो समतल $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) + 9 = 0$ पर लंब है । **1**

Write the vector equation of the line passing through (1, 2, 3) and perpendicular to the plane $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) + 9 = 0$.

6. अंतराल $\pi/2 < x < \pi$ में x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए आव्यूह $\begin{pmatrix} 2\sin x & 3 \\ 1 & 2\sin x \end{pmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है । **1**

In the interval $\pi/2 < x < \pi$, find the value of x for which the matrix $\begin{pmatrix} 2\sin x & 3 \\ 1 & 2\sin x \end{pmatrix}$ is singular.

खण्ड – ब

SECTION – B

प्रश्न संख्या **7** से **19** तक प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है ।

Question numbers **7** to **19** carry **4** marks each.

7. रेखाओं $\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ तथा $\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए । **4**

Find the shortest distance between the following lines :

$\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ and $\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

8. सिद्ध कीजिए कि $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{31}{25\sqrt{2}}\right)$ **4**

अथवा

x के लिए हल कीजिए : $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1} x, x > 0$

Prove that $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{31}{25\sqrt{2}}\right)$

OR

Solve for x : $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1} x, x > 0$

9. λ के किस मान के लिए फलन $f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2+2), & \text{यदि } x \le 0 \\ 4x+6, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$ $x = 0$ पर संतत है । अत: $x = 0$ पर फलन की अवकलनीयता की जाँच कीजिए । **4**

For what value of λ the function defined by $f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2+2), & \text{if } x \le 0 \\ 4x+6, & \text{if } x > 0 \end{cases}$ is continuous at $x = 0$? Hence check the differentiability of f(x) at $x = 0$.

10. यदि $x = ae^t (\sin t + \cos t)$ तथा $y = ae^t (\sin t - \cos t)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$. **4**

If $x = ae^t (\sin t + \cos t)$ and $y = ae^t (\sin t - \cos t)$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$.

11. यदि $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - (m + n) \frac{dy}{dx} + mny = 0$ **4**

If $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$, show that $\frac{d^2y}{dx^2} - (m + n) \frac{dy}{dx} + mny = 0$.

12. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x + 3}{\sqrt{5 - 4x - 2x^2}} dx$ **4**

Find $\int \frac{x + 3}{\sqrt{5 - 4x - 2x^2}} dx$.

13. किसी व्यापार संघ के पास ₹ 35,000 का कोष है जिसे दो भिन्न-भिन्न प्रकार के बाँडों में निवेशित करना है । प्रथम बाँड पर 8% वार्षिक ब्याज है, जिसे एक अनाथालय को दे दिया जाना है तथा द्वितीय बाँड पर 10% ब्याज है जिसे एक एन.जी.ओ. (कैंसर ऍड सोसाइटी) को दे दिया जाना है । आव्यूह गुणन के प्रयोग से यह निर्धारित कीजिए कि ₹ 35,000 के कोष को दो प्रकार के बाँडों में निवेश करने के लिए किस प्रकार बाँटें जिससे व्यापार संघ को प्राप्त कुल ब्याज ₹ 3,200 हो ?

इस प्रश्न से क्या मूल्य जनित होते हैं ? **4**

A trust fund has ₹ 35,000 is to be invested in two different types of bonds. The first bond pays 8% interest per annum which will be given to orphanage and second bond pays 10% interest per annum which will be given to an N.G.O. (Cancer Aid Society). Using matrix multiplication, determine how to divide ₹ 35,000 among two types of bonds if the trust fund obtains an annual total interest of ₹ 3,200. What are the values reflected in this question ?

14. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम-सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए । **4**

Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ as the sum of a symmetric and skew symmetric matrix.

अथवा/OR

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, verify that $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

15. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से निम्न को x के लिए हल कीजिए : **4**

$$\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$$

Using properties of determinants, solve for x : $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$

16. मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi/4} \log (1 + \tan x)\, dx$ **4**

Evaluate $\int_0^{\pi/4} \log (1 + \tan x)\, dx$.

17. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}\, dx$ **4**

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$

Find $\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}\, dx$.

OR

Find $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$.

18. 52 ताश के पत्तों की भली भांति फेंटी गई गड्डी में से 4 पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना सहित निकाले जाते हैं । इसकी क्या प्रायिकता है कि **4**

(i) सभी 4 पत्ते हुकुम के हैं ?

(ii) केवल 2 पत्ते हुकुम के हैं ?

अथवा

पासों के एक जोड़े को चार बार उछालने पर द्विकों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए । इस बंटन का माध्य भी ज्ञात कीजिए ।

Four cards are drawn successively with replacement from a well shuffled deck of 52 cards. What is the probability that

(i) all the four cards are spades ?

(ii) only 2 cards are spades ?

OR

A pair of dice is thrown 4 times. If getting a doublet is considered a success, find the probability distribution of number of successes. Hence find the mean of the distribution.

19. सिद्ध कीजिए कि : $\left[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{d}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right]$ **4**

Prove that $\left[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{d}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right]$

खण्ड – स

SECTION – C

प्रश्न संख्या **20** से **26** तक प्रत्येक प्रश्न **6** अंक का है ।

Question numbers **20** to **26** carry **6** marks each.

20. एक बहुविकल्पी प्रश्न का उत्तर देने में एक विद्यार्थी या तो प्रश्न का उत्तर जानता है या वह अनुमान लगाता है । मान लें कि उसके उत्तर जानने की प्रायिकता $\frac{3}{5}$ है तथा अनुमान लगाने की प्रायिकता $\frac{2}{5}$ है । मान लें कि छात्र के प्रश्न का उत्तर अनुमान लगाने पर सही उत्तर देने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि कोई छात्र प्रश्न का उत्तर जानता है यदि यह ज्ञात है कि उसने सही उत्तर दिया है ? **6**

In answering a question on a multiple choice test, a student either knows the answer or guesses. Let $\frac{3}{5}$ be the probability that he knows the answer and $\frac{2}{5}$ be the probability that he guesses. Assuming that a student who guesses at the answer will be correct with probability $\frac{1}{3}$, what is the probability that the student knows the answer given that he answered it correctly ?

21. एक निर्माणकर्त्ता नट और बोल्ट का निर्माण करता है । एक पैकेट नटों के निर्माण में मशीन A पर 2 घंटे तथा मशीन B पर 3 घंटे काम करना पड़ता है जबकि एक पैकेट बोल्ट के निर्माण में 3 घंटे मशीन A पर तथा 2 घंटे मशीन B पर काम करना पड़ता है । वह नटों से ₹ 24 प्रति पैकेट और बोल्टों पर ₹ 18 प्रति पैकेट लाभ कमाता है । यदि प्रतिदिन मशीनों का अधिकतम उपयोग 10 घंटे किया जाए, तो प्रत्येक प्रकार के कितने पैकेट उत्पादित किये जाएँ ताकि लाभ अधिकतम हो ? उपरोक्त को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए । **6**

A manufacturer produces nuts and bolts. It takes 2 hours work on machine A and 3 hours on machine B to produce a package of nuts. It takes 3 hours on machine A and 2 hours on machine B to produce a package of bolts. He earns a profit of ₹ 24 per package on nuts and ₹ 18 per package on bolts. How many packages of each should be produced each day so as to maximize his profit, if he operates his machines for at the most 10 hours a day. Make an L.P.P. from above and solve it graphically ?

22. एक गोले तथा एक घनाभ, जिसकी भुजाएँ $\frac{x}{3}$, x तथा $2x$ हैं, के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का योग अचर है । दर्शाइए कि उनके आयतनों का योग न्यूनतम होगा यदि x का मान गोले की त्रिज्या का तीन गुना है । **6**

The sum of surface areas of a sphere and a cuboid with sides $\frac{x}{3}$, x and $2x$, is constant. Show that the sum of their volumes is minimum if x is equal to three times the radius of sphere.

23. सिद्ध कीजिए कि A = {1, 2, 3, 4, 5} में R = {(a, b) : |a – b|, 2 से विभाजित है } द्वारा प्रदत्त संबंध एक तुल्यता संबंध है । इस संबंध के सभी तुल्यता वर्ग लिखिए । **6**

Show that the relation R in the set A = {1, 2, 3, 4, 5} given by R = {(a, b) : |a – b| is divisible by 2} is an equivalence relation. Write all the equivalence classes of R.

24. समाकलनों के प्रयोग से क्षेत्र $\{(x, y) : y^2 \le 4x,\ 4x^2 + 4y^2 \le 9\}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । **6**

अथवा

समाकलनों के प्रयोग से परवलय $4y = 3x^2$ तथा रेखा $2y = 3x + 12$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Find the area of the region $\{(x, y) : y^2 \le 4x,\ 4x^2 + 4y^2 \le 9\}$, using integration.

OR

Using integration, find the area enclosed by the parabola $4y = 3x^2$ and the line $2y = 3x + 12$.

25. अवकल समीकरण $\left(x \sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right) dx + x\, dy = 0$ का हल ज्ञात कीजिए, दिया है जब $x = 1$ है, तो $y = \frac{\pi}{4}$ है । **6**

अथवा

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - 3y \cot x = \sin 2x$ का हल ज्ञात कीजिए, दिया है, कि $x = \frac{\pi}{2}$ है, तो $y = 2$ है ।

Solve the differential equation

$\left(x \sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right) dx + x\, dy = 0$ given $y = \frac{\pi}{4}$ when $x = 1$.

OR

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} - 3y \cot x = \sin 2x$ given $y = 2$ when $x = \frac{\pi}{2}\cdot$

26. उस समतल के सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$ तथा $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाता है तथा x-अक्ष तथा z-अक्ष पर समान अन्त:खंड काटता है । **6**

Find the vector and cartesian equations of the plane passing through the line of intersection of the planes

$\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$, $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$

such that the intercepts made by the plane on x-axis and z-axis are equal.

QUESTION PAPER CODE 65/3

EXPECTED ANSWER/VALE POINTS

SECTION A

Marks

1. $\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) + \lambda(\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k})$ — 1

2. For singular matrix

$4\sin^2 x - 3 = 0$ — ½

$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ — ½

3. $\int e^{2y}dy = \int x^3 dx$ — ½

$\Rightarrow \frac{e^{2y}}{2} = \frac{x^4}{4} + c$ — ½

4. I.F. $= e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx}$ — ½

$= e^{2\sqrt{x}}$ — ½

5. $3\vec{a}+2\vec{b} = 7\hat{i}-5\hat{j}+4\hat{k}$ — ½

$\therefore$ D.R's are 7, –5, 4 — ½

6. $(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}) = 12$ — ½

$p = \frac{12}{|\vec{b}|} = \frac{12}{3} = 4$ — ½

SECTION B

7. LHS $= \vec{a}\cdot\{(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{d}\} = \vec{a}\cdot\{\vec{b}\times\vec{d}+\vec{c}\times\vec{d}\}$ — 1+1

$= \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{d}) + \vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$ — 1

$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] + [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}]$ — 1

8. Here $\vec{a}_1 = 2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k},\ \vec{a}_2 = 7\hat{i}-6\hat{k}$

$\vec{b}_1 = 3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k},\quad \vec{b}_2 = \hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$

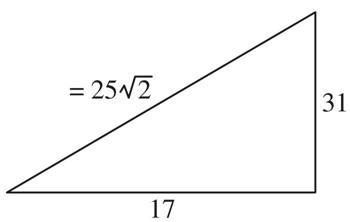
$\vec{a}_2-\vec{a}_1 = 5\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$ 1

$\vec{b}_1\times\vec{b}_2 = -8\hat{i}+4\hat{k}$ 1

$$\text{SD} = \frac{|(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)|}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_1|}$$ 1

$$= \frac{|-40-28|}{\sqrt{64+16}} = \frac{68}{\sqrt{80}} = \frac{17}{\sqrt{5}}$$ 1

9.



$$\text{LHS} = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}+\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$$ 1½

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7}} = \tan^{-1}\frac{31}{17}$$ 1½

$$= \sin^{-1}\left(\frac{31}{25\sqrt{2}}\right) = \text{RHS}$$ 1

OR

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}1-\tan^{1}x = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$ 1½

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\tan^{-1}x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan^{-1}x = \frac{\pi}{6}$$ 1½

$$x = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$ 1

10. $\text{LHL} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 2\lambda$

$\text{RHL} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 6$

$f(0) = 2\lambda$

$\Rightarrow 2\lambda = 6 \;\Rightarrow\; \lambda = 3$ 2

Differentiability

$\text{LHD} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0) - f(0-h)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{3(2) - 3((-h)^2 + 2)}{h} = \lim_{h \to 0} 3h = 0$ 1

$\text{RHD} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(4h+6) - 3(2)}{h} = \lim_{h \to 0} 4 = 4$ ½

LHD $\neq$ RHD $\quad \therefore$ f(x) is not differentiable at x = 0 ½

11. $x = ae^t(\sin t + \cos t)$ and $y = ae^t(\sin t - \cos t)$

$\dfrac{dx}{dt} = a[e^t(\cos t - \sin t) + e^t(\sin t + \cos t)] = -y + x$ 1½

$\dfrac{dy}{dt} = a[e^t(\cos t + \sin t) + e^t(\sin t - \cos t) = x + y$ 1½

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{x+y}{x-y}$ 1

12. $y = Ae^{mx} + Be^{nx} \Rightarrow mAe^{mx} + nBe^{nx}$ 1

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = m^2Ae^{mx} + n^2Be^{nx}$ 1

$$\text{LHS} = \frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny$$

$$= m^2Ae^{mx} + n^2Be^{nx} - (m+n)\{mAe^{mx} + nBe^{nx}\} + mn\{Ae^{mx} + Be^{nx}\}$$ 1

$$= Ae^{mx}(m^2 - m^2 - mn + mn) + Be^{nx}(n^2 - mn - n^2 + mn)$$

$$= 0 = \text{RHS.}$$ 1

13. $$I = \int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-2x^2}}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{4}(-4-4x)+2}{\sqrt{5-4x-2x^2}}\,dx$$ 1

$$= -\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{5-4x-2x^2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 - (x+1)^2}}$$ 1+1

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{5-4x-2x^2} + \sqrt{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{7/2}}\right) + C$$ 1

14. Let investment in first type of bonds be Rs x.

$\therefore$ Investment in 2nd type = Rs (35000 – x) ½

$$\begin{pmatrix} x & 35000-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{8}{100} \\ \frac{10}{100} \end{pmatrix} = (3200)$$ 1½

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{8}{100}x + (35000-x)\frac{10}{100} = 3200 \\ &\Rightarrow x = \text{Rs } 15000 \end{aligned}\right\}$$ 1

$$\left.\begin{aligned} &\therefore \text{Investment in first} = \text{Rs } 15000 \\ &\text{and in 2nd} = \text{Rs } 20000 \end{aligned}\right\}$$ 1

15. Getting $A' = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ 1

Let $P = \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 11 & -5 \\ 11 & 6 & 3 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11/2 & -5/2 \\ 11/2 & 3 & 3/2 \\ -5/2 & 3/2 & 4 \end{pmatrix}$ 1

Since $P' = P$ $\therefore$ P is a symmetric matrix

Let $Q = \frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 3 & 0 & 7 \\ 7 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & -7/2 \\ 3/2 & 0 & 7/2 \\ 7/2 & -7/2 & 0 \end{pmatrix}$ 1

Since $Q' = -Q$ $\therefore$ Q is skew symmetric

Also

$$P + Q = \begin{pmatrix} 2 & 11/2 & -5/2 \\ 11/2 & 3 & 3/2 \\ -5/2 & 3/2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & -7/2 \\ 3/2 & 0 & 7/2 \\ 7/2 & -7/2 & 0 \end{pmatrix} = A$$ 1

OR

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -14 \end{pmatrix}$ 1

$\text{LHS} = (AB)^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ or $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ 1

$\text{RHS} = B^{-1}A^{-1} = 1\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{-1}{11}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ 1+1

$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$

16. $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3,$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3a-x & 3a-x & 3a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$$ 1

$C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_1$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3a-x & 0 & 0 \\ a-x & 2x & 0 \\ a-x & 0 & 2x \end{vmatrix} = 0$$ 1+1

$\Rightarrow 4x^2(3a-x) = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = 3a$ 1

17. $I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$ ...(i)

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx = \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx$$ 1 + ½

$$= \int_0^{\pi/4} [\log 2 - \log(1+\tan x)]\,dx$$ ...(ii) 1

adding (i) and (ii) to get

$$2I = \log 2 \int_0^{\pi/4} 1 \cdot dx = \frac{\pi}{4}\log 2$$ 1

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{8}\log 2$$ ½

18. Writing $I = \int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx = \int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx$ 1

$$= \int \frac{1/2}{x-1}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}dx$$ 1½

$$= \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$ 1½

OR

$$I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\sin^{-1}x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$$

Putting $x = \sin\theta$, $\therefore$ $dx = \cos\theta\, d\theta$ and $x = 0$ then $\theta = 0$

$x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ then $\theta = \frac{\pi}{4}$ 1

$$I = \int_0^{\pi/4} \theta \cdot \frac{\cos\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \theta \cdot \sec^2\theta\, d\theta$$ 1

$$= [\theta\tan\theta - \log|\sec\theta|]_0^{\pi/4}$$ 1

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$ 1

19. (i) P (all four spades) = ${}^4C_4\left(\frac{13}{52}\right)^4\left(\frac{39}{52}\right)^0 = \frac{1}{256}$ 2

(ii) P (only 2 are spades) = ${}^4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128}$ 2

OR

$n = 4$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$

No. of successes

x	0	1	2	3	4	½
P(x)	${}^4C_0\left(\frac{5}{6}\right)^4$	${}^4C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3$	${}^4C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$	${}^4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)$	${}^4C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4$	
	$=\frac{625}{1296}$	$=\frac{500}{1296}$	$=\frac{150}{1296}$	$=\frac{20}{1296}$	$=\frac{1}{1296}$	2½
xP(x)	0	$\frac{500}{1296}$	$\frac{300}{1296}$	$\frac{60}{1296}$	$\frac{4}{1296}$	

Mean = $\sum xP(x) = \frac{864}{1296} = \frac{2}{3}$. 1

SECTION C

20. Equation of plane is

$\left\{\vec{r}\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})-7\right\}+\lambda\left\{\vec{r}\cdot(2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k})-9\right\}=0$ 1½

$\Rightarrow \vec{r}\cdot\left\{(2+2\lambda)\hat{i}+(2+5\lambda)\hat{j}(-3+3\lambda)\hat{k}\right\}=(7+9\lambda)$ 1½

x-intercept = y-intercept $\Rightarrow \frac{7+9\lambda}{2+2\lambda}=\frac{7+9\lambda}{-3+3\lambda}$ 1

$\Rightarrow \lambda = 5$ ½

$\therefore$ Eqn. of plane is

$\vec{r}\cdot(12\hat{i}+27\hat{j}+12\hat{k})=52$ ½

and $12x + 27y + 12z - 52 = 0$ 1

21. E_1: student knows the answer

E_2: student guesses the answer

A: answers correctly.

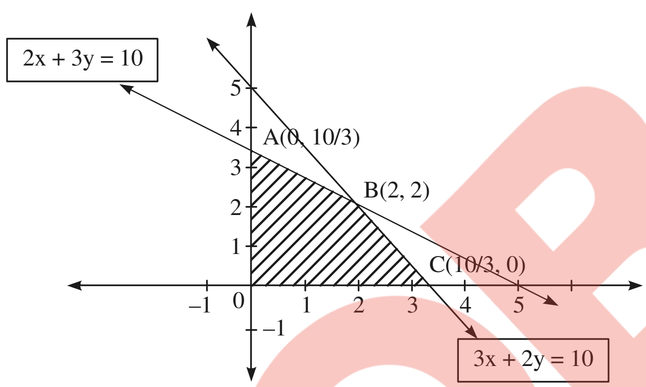
$P(E_1) = \frac{3}{5}, \quad P(E_2) = \frac{2}{5}$ 1

$P\left(\frac{A}{E_1}\right) = 1, \quad P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{1}{3}$ 1+1

$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1) \cdot P(A/E_1)}{P(E_1) \cdot P(A/E_1) + P(E_2) \cdot P(A/E_2)}$ 1

$= \frac{\frac{3}{5} \cdot 1}{\frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{9}{11}$ 1+1

22.



L.P.P. is Maximise P = 24x + 18y ½

s.t. $2x + 3y \le 10$

$3x + 2y \le 10$ 2

$x, y \ge 0$

Correct figure 2

P(A) = Rs 60

P(B) = Rs 84 ½

P(C) = Rs 80

$\therefore$ Max. = 84 at (2, 2) 1

23. Given: $s = 4\pi r^2 + 2\left[\frac{x^2}{3} + 2x^2 + \frac{2x^2}{3}\right]$

$= 4\pi r^2 + 6x^2$ 1

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{2x^3}{3}$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\left(\frac{S - 4\pi r^2}{6}\right)^{3/2}$ 1

$$\frac{dv}{dr} = 4\pi r^2 + \left(\frac{S-4\pi r^2}{6}\right)^{1/2}\left(\frac{-8\pi r}{6}\right)$$ 1

$$\frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{54+4\pi}}$$ 1

showing $\frac{d^2v}{dr^2} > 0$ 1

$\therefore$ For $r = \sqrt{\frac{S}{54+4\pi}}$ volume is minimum

i.e., $(54 + 4\pi)r^2 = 4\pi r^2 + 6x^2$

$6x^2 = 54r^2 \Rightarrow x^2 = 9r^2 \Rightarrow x = 3r$ 1

24. Here,

$$R = \begin{Bmatrix} (1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5) \\ (1,3),(1,5),(2,4),(3,5) \\ (3,1),(5,1),(4,2),(5,3) \end{Bmatrix}$$ 2

Clearly

(i) $\forall a \in A, (a, a) \in R \quad \therefore$ R is reflexive 1

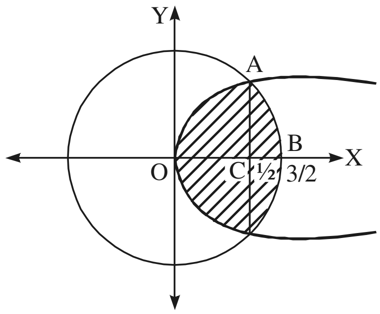
(ii) $\forall (a,b) \in A, (b, a) \in R \quad \therefore$ R is symmetric 1

(iii) $\forall (a,b), (b,c) \in R, (a,c) \in R \quad \therefore$ R is transitive 1

$\therefore$ R is an equivalence relation.

$[1] = \{1, 3, 5\}, \quad [2] = \{2, 4\}$ 1

25. $\{(x, y) : y^2 \le 4x,\ 4x^2 + 4y^2 \le 9\}$



Correct figure 1

Getting $x = \frac{1}{2}$ as point of intersection ½

$$A = 2\left[2\int_0^{1/2}\sqrt{x}\,dx + \int_{1/2}^{3/2}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2}\,dx\right] \quad 1$$

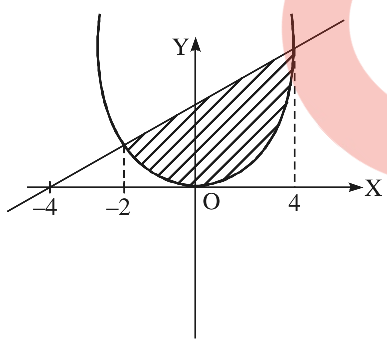
$$= 2\left[\left(\frac{4}{3}x^{3/2}\right)_0^{1/2} + \left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\frac{2x}{3}\right)_{1/2}^{3/2}\right] \quad 1½$$

$$= 2\left[\frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{9\pi}{16} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{9}{8}\sin^{-1}\frac{1}{3}\right] \quad 1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{1}{3} \text{ sq. unit} \quad 1$$

OR

Correct figure 1



Getting x = 4, –2 as points of intersection ½

$$A = \int_{-2}^{4}\frac{1}{2}(3x + 12)\,dx - \int_{-2}^{4}\frac{3}{4}x^2 dx \quad 1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2}{2} + 12x\right)_{-2}^{4} - \frac{1}{4}(x^3)\Big]_{-2}^{4} \quad 1½$$

$$= \frac{1}{2}(24 + 48 - 6 + 24) - \frac{1}{4}(64 + 8) \quad 1½$$

$= 45 - 18 = 27$ sq. units ½

26. $\left(x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right)dx + x\,dy = 0$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x\sin^2(y/x)}{x} = \dfrac{y}{x} - \sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 1

$v + x\dfrac{dv}{dx} = v - \sin^2 v$ where $\dfrac{y}{x} = v.$ 1

$\Rightarrow \int -\dfrac{dv}{\sin^2 v} = \int \dfrac{dx}{x}$ or $\int -\text{cosec}^2 v\, dv = \int \dfrac{dx}{x}$ 1½

$\cot v = \log x + C$ i.e., $\cot\dfrac{y}{x} = \log x + C$ 1½

$y = \dfrac{\pi}{4}, x = 1, \Rightarrow C = 1$ ½

$\Rightarrow \cot\dfrac{y}{x} = \log x + 1$ ½

OR

$\dfrac{dy}{dx} - 3\cot x \cdot y = \sin 2x$

IF $= e^{\int -3\cot x\, dx} = e^{-3\log \sin x} = \text{cosec}^3 x$ 1

$\therefore$ Solution is

$y \cdot \text{cosec}^3 x = \int \sin 2x\, \text{cosec}^3 x\, dx$ 1½

$= \int 2\text{cosec}\, x \cot x\, dx$ ½

$y \cdot \text{cosec}^3 x = -2\, \text{cosec}\, x + C$ 1½

or $y = -2\sin^2 x + C\sin^3 x$

$x = \dfrac{\pi}{2},\ y = 2 \Rightarrow C = 4$ 1

$\Rightarrow y = -2\sin^2 x + 4\sin^3 x$ ½