Series ONS

SET-2

कोड नं.
Code No. **65/2/E**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है। प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जायेगा। 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **26** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 26 प्रश्न हैं।

(iii) **खण्ड अ** के प्रश्न **1 - 6** तक अति लघु-उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **1** अंक निर्धारित है।

(iv) **खण्ड ब** के प्रश्न **7 - 19** तक दीर्घ-उत्तर **I** प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **4** अंक निर्धारित हैं।

(v) **खण्ड स** के प्रश्न **20 - 26** तक दीर्घ-उत्तर **II** प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **6** अंक निर्धारित हैं।

(vi) उत्तर लिखना प्रारम्भ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए।

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are* ***compulsory****.*

(ii) *Please check that this question paper contains* ***26*** *questions.*

(iii) *Questions* ***1 - 6*** *in* ***Section A*** *are very short-answer type questions carrying* ***1*** *mark each.*

(iv) *Questions* ***7 - 19*** *in* ***Section B*** *are long-answer* ***I*** *type questions carrying* ***4*** *marks each.*

(v) *Questions* ***20 - 26*** *in* ***Section C*** *are long-answer* ***II*** *type questions carrying* ***6*** *marks each.*

(vi) *Please write down the serial number of the question before attempting it.*

खण्ड - अ

SECTION - A

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न का एक अंक है।

Question numbers 1 to 6 carry 1 mark each.

1. सभी संभव 2×3 कोटि के आव्यूहों की कुल संख्या लिखिए जिनका प्रत्येक अवयव 1 या 2 है।

Write the number of all possible matrices of order 2×3 with each entry 1 or 2.

2. यदि $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6\sqrt{3}$ है, तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6\sqrt{3}$, then find the value of $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

3. यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ तथा $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ है तथा $BA = (b_{ij})$ है, तो $b_{21} + b_{32}$ ज्ञात कीजिए।

If $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ and $BA = (b_{ij})$, find $b_{21} + b_{32}$.

4. बिंदु (α, β, γ) के XZ - समतल में प्रतिबिंबित बिंदु के निर्देशांक लिखिए।

Write the coordinates of the point which is the reflection of the point (α, β, γ) in the XZ-plane.

5. मान लिखिए : $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

Write the value of $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$.

6. उस बिंदु का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए जो कि बिंदुओं, जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}+3\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ हैं, को मिलाने वाले रेखाखण्ड का 1 : 3 के अनुपात में अंतः विभाजित करता है।

Find the position vector of the point which divides the join of points with position vectors $\vec{a}+3\vec{b}$ and $\vec{a}-\vec{b}$ internally in the ratio 1 : 3.

खण्ड - ब

SECTION - B

प्रश्न संख्या 7 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं।

Question numbers 7 to 19 carry 4 marks each.

7. अपने जन्मदिवस पर सीमा ने निश्चय किया कि वह अनाथालय के बच्चों को कुछ राशि दान करेगी। यदि 8 बच्चे कम होते, तो प्रत्येक को ₹ 10 अधिक मिलते। परन्तु यदि 16 बच्चे और होते, तो प्रत्येक को ₹ 10 कम मिलते। आव्यूह विधि के प्रयोग से बच्चों की संख्या और सीमा द्वारा वितरित राशि ज्ञात कीजिए। सीमा के इस निश्चय में आपको कौन सा मूल्य झलकता है ?

On her birthday Seema decided to donate some money to children of an orphanage home. If there were 8 children less, every one would have got ₹ 10 more. However, if there were 16 children more, every one would have got ₹ 10 less. Using matrix method, find the number of children and the amount distributed by Seema. What values are reflected by Seema's decision ?

8. दर्शाइए कि प्रदत्त फलन f :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1} & , \text{ यदि } x\neq 0\\ -1 & , \text{ यदि } x=0\end{cases}$$

$x=0$ पर असंतत है।

Show that the function f given by :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1} & , \text{if } x\neq 0\\ -1 & , \text{if } x=0\end{cases}$$

is discontinuous at $x=0$.

9. मान ज्ञात कीजिए : $\int_1^5 \{|x-1|+|x-2|+|x-3|\}\,dx$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+3\cos^2 x}\,dx$

Evaluate : $\int_1^5 \{|x-1|+|x-2|+|x-3|\}\,dx$

OR

Evaluate : $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+3\cos^2 x}\,dx$

10. ज्ञात कीजिए : $\int (3x+5)\sqrt{5+4x-2x^2}\,dx$

Find : $\int (3x+5)\sqrt{5+4x-2x^2}\,dx$

11. निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$(x^2+3xy+y^2)\,dx - x^2\,dy = 0$, दिया है कि जब $x=1$ है तो $y=0$ है।

Solve the differential equation :

$(x^2+3xy+y^2)\,dx - x^2\,dy = 0$ given that $y=0$, when $x=1$.

12. x के लिए हल कीजिए : $\tan^{-1}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}, x>0$.

अथवा

सिद्ध कीजिए कि $2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{17}{31}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Solve for x : $\tan^{-1}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}, x>0$.

OR

Prove that $2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{17}{31}\right) = \frac{\pi}{4}$.

13. एक समूह के 7 लड़कों और 4 लड़कियों में से यादृच्छया 4 विद्यार्थियों की कमेटी चुनी गई। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस कमेटी में ठीक ठीक 2 लड़के हैं, दिया है कि इस कमेटी में कम से कम एक लड़की अवश्य हो।

अथवा

एक यादृच्छिक चर X का निम्नलिखित प्रायिकता बंटन है :

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	C	2C	2C	3C	C^2	$2C^2$	$7C^2+C$

C का मान ज्ञात कीजिए और इस बंटन का माध्य भी ज्ञात कीजिए।

A committee of 4 students is selected at random from a group consisting of 7 boys and 4 girls. Find the probability that there are exactly 2 boys in the committee, given that at least one girl must be there in the committee.

OR

A random variable X has the following probability distribution :

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	C	2C	2C	3C	C^2	$2C^2$	$7C^2+C$

Find the value of C and also calculate mean of the distribution.

14. दर्शाइए कि रेखाएँ $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$ तथा $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$ प्रतिच्छेद करती हैं। उनका प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात कीजिए।

Show that the lines $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$ and $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$ intersect. Find their point of intersection.

15. यदि $x = e^{\cos 2t}$ और $y = e^{\sin 2t}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{y \log x}{x \log y}$.

अथवा

$[0, \pi]$ में $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ के लिए माध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

If $x = e^{\cos 2t}$ and $y = e^{\sin 2t}$, prove that $\frac{dy}{dx} = -\frac{y \log x}{x \log y}$.

OR

Verify Mean Value theorem for the function $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ on $[0, \pi]$.

16. सदिशों $\vec{a}+\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जबकि $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ है। अत: $\vec{a}+\vec{b}$ तथा $\vec{a}-\vec{b}$ दोनों पर लंबवत एक सदिश ज्ञात कीजिए।

Find the angle between the vectors $\vec{a}+\vec{b}$ and $\vec{a}-\vec{b}$ if $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, and hence find a vector perpendicular to both $\vec{a}+\vec{b}$ and $\vec{a}-\vec{b}$.

17. वक्र $y = \sqrt{5x-3} - 5$ की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि रेखा $4x - 2y + 5 = 0$ के समांतर है।

Find the equation of the tangent line to the curve $y = \sqrt{5x-3} - 5$, which is parallel to the line $4x - 2y + 5 = 0$.

18. अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x\frac{dy}{dx} + y - x + xy \cot x = 0;\ x \neq 0.$$

Solve the differential equation :

$$x\frac{dy}{dx} + y - x + xy \cot x = 0;\ x \neq 0.$$

19. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

Find : $\int \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

खण्ड - स
SECTION - C

प्रश्न संख्या 20 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं।
Question numbers 20 to 26 carry 6 marks each.

20. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से x के लिए हल कीजिए : $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$

अथवा

प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं का प्रयोग करके आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

अत: समीकरण निकाय $3x-3y+4z=21,\ 2x-3y+4z=20,\ -y+z=5$ का हल ज्ञात कीजिए।

Solve for x : $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$, using properties of determinants.

OR

Using elementary row operations find the inverse of matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

and hence solve the following system of equations $3x-3y+4z=21$, $2x-3y+4z=20$, $-y+z=5$.

21. समाकलनों के प्रयोग से उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो ऋणात्मक x-अक्ष तथा वक्र $x^2+y^2=9$ के बिंदु $\left(-1,2\sqrt{2}\right)$ पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा अभिलंब द्वारा बनी है।

Using integration, find the area of the triangle formed by negative x-axis and tangent and normal to the circle $x^2+y^2=9$ at $\left(-1,2\sqrt{2}\right)$.

22. एक कंपनी दो प्रकार के स्वैटर बनाती है : A व B प्रकार के। A प्रकार का स्वैटर बनाने की लागत ₹ 360 तथा B प्रकार का स्वैटर बनाने की लागत ₹ 120 है। कंपनी एक दिन में अधिकतम 300 स्वैटर बना सकती है व अधिकतम ₹ 72,000 खर्च कर सकती है। B प्रकार के स्वैटरों की संख्या, A प्रकार के स्वैटरों की संख्या से अधिकतम 200 से अधिक नहीं हो सकती। कंपनी A प्रकार के प्रत्येक स्वैटर पर ₹ 100 और B प्रकार के स्वैटर पर ₹ 50 लाभ कमाती है।

कंपनी के अधिकतम लाभ के लिए इस समस्या का रैखिक प्रोग्रामन निरूपण कीजिए। आलेख द्वारा अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए।

A company manufactures two types of cardigans : type A and type B. It costs ₹ 360 to make a type A cardigan and ₹ 120 to make a type B cardigan. The company can make at most 300 cardigans and spend at most ₹ 72,000 a day. The number of cardigans of type B cannot exceed the number of cardigans of type A by more than 200. The company makes a profit of ₹ 100 for each cardigan of type A and ₹ 50 for every cardigan of type B.

Formulate this problem as a linear programming problem to maximise the profit to the company. Solve it graphically and find maximum profit.

23. A, B तथा C इसी क्रम में पासों के एक जोड़े को बारी बारी से उछालते हैं जब तक उनमें से कोई 9 का योग प्राप्त कर खेल को जीत जाता है। यदि A खेल को प्रारंभ करता है तो उनके जीतने की क्रमशः प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

A, B and C throw a pair of dice in that order alternately till one of them gets a total of 9 and wins the game. Find their respective probabilities of winning, if A starts first.

24. दर्शाइए कि एक लंब वृत्तीय शंकु जिसकी ऊँचाई h और अर्धशीर्ष कोण α है, के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई शंकु की ऊँचाई का एक-तिहाई है और अधिकतम आयतन $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2\alpha$ है।

अथवा

वे अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = \frac{4 \sin x}{2 + \cos x} - x; 0 \leq x \leq 2\pi$ निरंतर वर्धमान या निरंतर ह्रासमान है।

Show that height of the cylinder of greatest volume which can be inscribed in a right circular cone of height h and semi-vertical angle α is one-third that of the cone and the greatest volume of the cylinder is $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2\alpha$.

OR

Find the intervals in which the function $f(x) = \frac{4 \sin x}{2 + \cos x} - x; 0 \leq x \leq 2\pi$ is strictly increasing or strictly decreasing.

25. बिंदु P(4, 3, 2) से समतल $x + 2y + 3z = 2$ पर खींचे गए लंब के पाद के निर्देशांक तथा लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए। तल में P का प्रतिबिम्ब भी ज्ञात कीजिए।

Find the coordinates of the foot of perpendicular and perpendicular distance from the point P(4, 3, 2) to the plane $x + 2y + 3z = 2$. Also find the image of P in the plane.

26. दर्शाइए कि संबंध R, जो कि समुच्चय $A \times A$ पर जहाँ $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ है, इस प्रकार परिभाषित है कि (a, b) R (c, d) $\Rightarrow a + d = b + c$; a, b, c, d $\in$ A एक तुल्यता संबंध है। अत: तुल्यता वर्ग [(3, 4)] लिखिए।

Show that the relation R defind by (a, b) R (c, d) $\Rightarrow a + d = b + c$ on the $A \times A$, where $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ is an equivalence relation. Hence write the equivalence class [(3, 4)]; a, b, c, d $\in$ A.

QUESTION PAPER CODE 65/2/E

EXPECTED ANSWER/VALUE POINTS

SECTION A

1. 2^6 or 64 1

2. Finding $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{1}{2}$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = 6$ $\frac{1}{2}$

3. $b_{21} = -16,\ b_{23} = -2$ [For any one correct value] $\frac{1}{2}$

$b_{21} + b_{23} = -16 + (-2) = -18$ $\frac{1}{2}$

4. $(\alpha, -\beta, \gamma)$ 1

5. $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ or $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ $\frac{1}{2}$

Ans. 0 $\frac{1}{2}$

6. $\dfrac{1(\vec{a} - \vec{b}) + 3(\vec{a} + 3\vec{b})}{4}$ (i.e., using correct formula) $\frac{1}{2}$

$= \vec{a} + 2\vec{b}$ $\frac{1}{2}$

SECTION B

7. Let the number of children be x and the amount distributed by Seema for one student be ₹ y.

So, $(x - 8)(y + 10) = xy$

$\Rightarrow \quad 5x - 4y = 40 \quad$ ...(i) $\frac{1}{2}$

and $(x + 16)(y - 10) = xy$

$\Rightarrow \quad 5x - 8y = -80 \quad$ ...(ii) $\frac{1}{2}$

Here $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -8 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 40 \\ -80 \end{bmatrix}$

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$A^{-1} = -\dfrac{1}{20}\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$ 1

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 30 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad x = 32,\ y = 30$ 1

No. of students = 32

Amount given to each student = ₹ 30.

Value reflected: To help needy people. 1

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$

LHL: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{h}}-1}{e^{-\frac{1}{h}}+1} = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$ 2

RHL: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{h}}-1}{e^{\frac{1}{h}}+1} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1-e^{-\frac{1}{h}}}{1+e^{-\frac{1}{h}}} = 1$ 2

LHL $\neq$ RHL

$\therefore$ f(x) is discontinuous at x = 0

9. $\int_1^5 \{|x-1| + |x-2| + |x-3|\}\, dx$

$= \int_1^5 (x-1)\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx + \int_2^5 (x-2)\,dx + \int_1^3 (3-x)\,dx + \int_3^5 (x-3)\,dx$ $2\frac{1}{2}$

$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^5 + \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 + \left[\frac{x^2}{3} - 3x\right]_3^5$ 1

= 17 $\frac{1}{2}$

OR

Let $I = \int_0^\pi \dfrac{x \sin x}{1+3\cos^2 x}\, dx$ ...(i)

$I = \int_0^\pi \dfrac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+3\cos^2(\pi - x)}\, dx$ 1

$= \int_0^\pi \dfrac{\pi \sin x}{1+3\cos^2 x}\, dx - \int_0^\pi \dfrac{x \sin x}{1+3\cos^2 x}\, dx$ ...(ii)

Adding (i) & (ii), we have

$2I = \int_0^\pi \dfrac{\pi \sin x}{1+3\cos^2 x}\, dx$ 1

Put cos x = t

–sin x dx = dt, when x = 0 ⇒ t = 1, for x = π ⇒ t = –1

$$2I = -\pi\int_{1}^{-1}\frac{dt}{1+3t^2} \qquad 1$$

$$= \frac{\pi}{3}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+(t)^2}$$

$$= \frac{\pi}{3}\times\sqrt{3}\left[\tan^{-1}(\sqrt{3}t\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{3}[\tan^{-1}\sqrt{3}-(-\tan^{-1}\sqrt{3})]$$

$$I = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{9} \qquad 1$$

10. $(3x+5)\sqrt{5+4x-2x^2}\ dx$

let 3x + 5 = A(4 – 4x) + B

$\Rightarrow$ $A = -\frac{3}{4}, B = 8$

$$I = -\frac{3}{4}\ (4-4x)\sqrt{5+4x-2x^2}\ dx + 8\ \sqrt{5+4x-2x^2}\ dx \qquad 1$$

$$= -\frac{3}{4}I_1 + 8I_2 \text{ (let)}$$

For I_1, put $5 + 4x – 2x^2 = t$

$\Rightarrow$ (4 – 4x) dx = dt

$$-\frac{3}{4}I_1 = -\frac{3}{4}\ \sqrt{t}\ dt = -\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}t^{3/2}$$

$$= -\frac{1}{2}(5+4x-2x^2)^{3/2} \qquad 1$$

$$8I_2 = 8\sqrt{2}\ \sqrt{\frac{7}{2}-(x-1)^2}\ dx \qquad \frac{1}{2}$$

$$= 8\sqrt{2}\left[\frac{x-1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}+2x-x^2}+\frac{7}{4}\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{7}}\right] \qquad 1$$

$$I = -\frac{1}{2}(5+4x-2x^2)^{3/2}+4\sqrt{2}(x-1)\sqrt{\frac{5}{2}+2x-x^2}+14\sqrt{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{7}}+C \qquad \frac{1}{2}$$

11. $(x^2 + 3xy + y^2)\ dx – x^2\ dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3xy+y^2}{x^2} \qquad \frac{1}{2}$$

let y = vx

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = 1 + 3v + v^2$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = v^2 + 2v + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{(v+1)^2} = \frac{dx}{x}$$ 1

Integrating both sides

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{v+1} = \log|x| + C$$ 1

$$\Rightarrow \quad \frac{-x}{x+y} = \log|x| + C$$

When $x = 1,\ y = 0 \Rightarrow C = -1$ $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{-x}{x+y} = \log|x| - 1$$

$$\Rightarrow \quad y = (x+y)\log|x|$$ $\frac{1}{2}$

or $\quad y = \dfrac{x\log|x|}{1-\log|x|}$

12. $\tan^{-1}\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right) = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{2}$

$$\Rightarrow \quad 2\tan^{-1}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = \tan^{-1}\frac{x}{2}$$ $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{2\left(\frac{2-x}{2+x}\right)}{1-\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2} = \tan^{-1}\frac{x}{2}$$ $1\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{4-x^2}{4x} = \tan^{-1}\frac{x}{2}$$ 1

$$\Rightarrow \quad \frac{4-x^2}{4x} = \frac{x}{2}$$ $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (\because x > 0)$$ $\frac{1}{2}$

OR

$$2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{17}{31}\right)$$

$$= 2\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{17}{31}\right)$$ 1

$$= \tan^{-1}\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} - \tan^{-1}\left(\frac{17}{31}\right)$$ 1

$$= \tan^{-1}\frac{24}{7} - \tan^{-1}\frac{17}{31}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{24}{7}-\frac{17}{31}}{1+\frac{24}{7}\times\frac{17}{31}}\right)$$ 1

$$= \tan^{-1}(1)$$ 1

$$= \frac{\pi}{4}$$

13. Let A = exactly 2 boys in the committee

B = at least one girl must be there in the committee.

$$P(B) = \frac{{}^4C_1 \times {}^7C_3 + {}^4C_2 \times {}^7C_2 + {}^4C_3 \times {}^7C_1 + {}^4C_4}{{}^{11}C_4}$$ 2

$$= \frac{59}{66}$$

$$P(A \cap B) = \frac{{}^4C_2 \times {}^7C_2}{{}^{11}C_4} = \frac{21}{55}$$ 1

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{21/55}{59/66} = \frac{126}{295}$$ 1

OR

$C + 2C + 2C + 3C + C^2 + 2C^2 + 7C^2 + C = 1$ 1

$\Rightarrow \quad 10C^2 + 9C = 1$

$\Rightarrow \quad 10C^2 + 9C - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{10}$ or $C = -1$ (not possible)

$\therefore \quad C = \frac{1}{10}$ 1

Mean $= 0 \times C + 1 \times 2C + 2 \times 2C + 3 \times 3C + 4 \times C^2 + 5 \times 2C^2 + 6(7C^2 + C)$ 1

$= 56C^2 + 21C$

$= 56 \times \frac{1}{100} + 21 \times \frac{1}{10}$

$= 0.56 + 2.1 = 2.66$ 1

14. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0} = \lambda$ (let) ...(i)

$\Rightarrow \quad x = 3\lambda + 1,\ y = -\lambda + 1,\ z = -1$ 1

$\frac{x-4}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3} = \mu$ ...(ii)

$\Rightarrow \quad x = 2\mu + 4,\ y = 0,\ z = 3\mu - 1$ 1

If the lines intersect, then they have a common point for some value of λ and μ.

So $\quad 3\lambda + 1 = 2\mu + 4$ ...(iii)

$-\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$3\mu - 1 = -1 \Rightarrow \mu = 0$ 1

Since $\lambda = 1$ & $\mu = 0$ satisfy equation (iii) so the given lines intersect and $\frac{1}{2}$

the point of intersection is (4, 0, –1). $\frac{1}{2}$

15. $\frac{dx}{dt} = e^{\cos 2t}(-2\sin 2t)$ or $-2x \sin 2t$ 1

$\frac{dy}{dt} = e^{\sin 2t}\, 2\cos 2t$ or $2y \cos 2t$ 1

$\frac{dy}{dx} = \frac{-e^{\sin 2t}\, 2\cos 2t}{e^{\cos 2t}\, 2\sin 2t}$ or $-\frac{y}{x}\frac{\cos 2t}{\sin 2t}$ 1

$= \frac{-y\log x}{x\log y}$ 1

OR

f(x) = 2 sin x + sin 2x on [0, π]

$\left.\begin{array}{l}\text{f(x) is continuous in } [0, \pi] \\ \text{f(x) is differentiable in } (0, \pi)\end{array}\right\}$ 1

∴ Mean value theorem is applicable

$f(0) = 0,\ f(\pi) = 0$

$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$ 1

$f'(c) = 2\cos c + 2\cos 2c$

$f'(c) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0} = 0$ 1

∴ $2\cos c + 2\cos 2c = 0$

⇒ $\cos c + 2\cos^2 c - 1 = 0$

⇒ $(2\cos c - 1)(\cos c + 1) = 0$

⇒ $\cos c = \frac{1}{2}$

⇒ $c = \frac{\pi}{3} \in (0, \pi)$

Hence mean value theorem is verified. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

16. $\vec{a} + \vec{b} = 5\hat{i} + \hat{k}$ $\frac{1}{2}$

$\vec{a} - \vec{b} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ $\frac{1}{2}$

Getting $\cos\theta = 0$ $1\frac{1}{2}$

⇒ $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\frac{1}{2}$

a vector perpendicular to both $\vec{a} + \vec{b}$ & $\vec{a} - \vec{b}$ is $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = 2\hat{i} - 26\hat{j} - 10\hat{k}$ 1

17. $y = \sqrt{5x-3} - 5$ ...(i)

$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2\sqrt{5x-3}}$ 1

Slope of line 4x – 2y + 5 = 0 is $\frac{-4}{-2} = 2$. $\frac{1}{2}$

$\therefore \quad \frac{5}{2\sqrt{5x-3}} = 2 \qquad x \quad \frac{73}{80}$ 1

Putting $x = \frac{73}{80}$ in eqn. (i), we get $y = \frac{-15}{4}$ $\frac{1}{2}$

Equation of tangent

$y + \frac{15}{4} = 2\left(x - \frac{73}{80}\right)$ 1

or 80x – 40y – 223 = 0

18. $x\frac{dy}{dx} + y - x + xy\cot x = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x} + \cot x\right)y = 1$ 1

$\text{I·F} = e^{\int\left(\frac{1}{x}+\cot x\right)dx} = e^{\log(x\sin x)}$ $\frac{1}{2}$

$= x\sin x$ 1

$\therefore \quad y \times x\sin x = \quad x\sin x\, dx$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad xy\sin x = -x\cos x + \sin x + C$ 1

19. Let $I = \int \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

Let $\frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$ 1

Getting $A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{3}, C = \frac{-2}{3}, D = \frac{-1}{3}$ 1

$\therefore \quad I = \frac{2}{3}\int\frac{x}{x^2+1}dx + \frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+1}dx + \frac{-2}{3}\int\frac{xdx}{x^2+4} + \frac{-1}{3}\int\frac{dx}{x^2+4}$

$= \frac{1}{3}\log|x^2+1| + \frac{1}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{3}\log|x^2+4| - \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$ 2

SECTION C

20. $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a+x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$

Applying $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ 1

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3a-x & a-x & a-x \\ 3a-x & a+x & a-x \\ 3a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$$ 1

$$\Rightarrow (3a-x)\begin{vmatrix} 1 & a-x & a-x \\ 1 & a+x & a-x \\ 1 & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$$ 1

Applying $R_2 \to R_2 - R_1$ & $R_3 \to R_3 - R_1$

$$\Rightarrow (3a-x)\begin{vmatrix} 1 & a-x & a-x \\ 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} = 0$$ 2

$\Rightarrow \quad (3a - x)(4x^2) = 0$ 1

$\Rightarrow \quad x = 0 \text{ or } 3a$

OR

$A = I \cdot A$ 1

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

Applying $R_1 \to R_1 - R_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

Applying $R_2 \to R_2 - 2R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

Applying $R_2 \to R_2 - 4R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

Applying $R_3 \to R_3 + R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} A$$ $\left[2\frac{1}{2} \text{ for correct operations to get } A^{-1}\right]$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$ $\frac{1}{2}$

The matrix form of given equations

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix}$$ 1

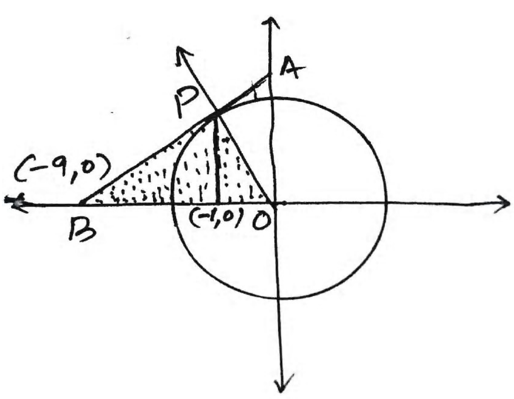
$\Rightarrow$ AX = B, where $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $X = A^{-1}B$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $x = 1, y = -2, z = 3$ 1

21. Correct Figure 1



Equation of circle $x^2 + y^2 = 9$

Diff. w.r.t x, we have

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$ $\frac{1}{2}$

Slope of tangent at $\left(-1, 2\sqrt{2}\right)$

$$m_T = \left(-\frac{x}{y}\right)_{(-1,2\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$ $\frac{1}{2}$

eqn. of tangent

$$y - 2\sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+1)$$ 1

$$\Rightarrow \quad x - 2\sqrt{2}y + 9 = 0$$

It cuts x-axis at (–9, 0)

eqn. of normal

$$y - 2\sqrt{2} = -2\sqrt{2}(x+1)$$ 1

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{2}x + y = 0$$

Area of ΔOPB

$$A = \int_{-9}^{-1} \frac{x+9}{2\sqrt{2}}\,dx + \int_{-1}^{0} -2\sqrt{2}x\,dx$$ 1

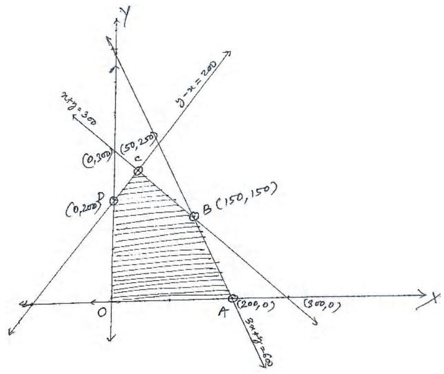
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{x^2}{2} + 9x\right]_{-9}^{-1} - 2\sqrt{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

$$= 9\sqrt{2} \text{ sq. unit}$$ 1

22. Let no. of cardigans of type A be x and that of type B by y.

Then, max. Z = 100x + 50y 1

subject to constraint,



$$x + y \le 300 \qquad ...(1)$$

$$360x + 120y \le 72{,}000$$

$$\Rightarrow \quad 3x + y \le 600 \qquad ...(2)$$

$$y - x \le 200 \qquad ...(3) \qquad 2$$

$$x, y \ge 0$$

Correct Figure 2

Corner points A(200, 0), B(150, 150), C(50, 250), D(0, 200), O(0, 0)

Corner points	**Z = 100x + 50y**
O(0, 0)	0
A(200, 0)	20,000
B(150, 150)	22,500 ← maximum
C(50, 250)	17,500
D(0, 200)	10,000

Hence no. of cardigans of type A = 150 and of type B = 150.

and max. profit is ₹ 22,500. 1

23. $\left.\begin{array}{l} P\text{ (winning)} = \dfrac{1}{9} \\[2ex] P\text{ (not winning)} = \dfrac{8}{9} \end{array}\right\}$ 1

$P(\text{A winning}) = P(A) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}A) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{A}\bar{B}\bar{C}A) + ...$ 1

$$= \frac{1}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^3 \frac{1}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^6 \frac{1}{9} + ...$$

$$= \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{512}{729}} = \frac{81}{217} \qquad 1$$

$P(\text{B winning}) = P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{A}B) + ...$ 1

$$= \frac{8}{9} \times \frac{1}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^4 \times \frac{1}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^7 \times \frac{1}{9} + ...$$

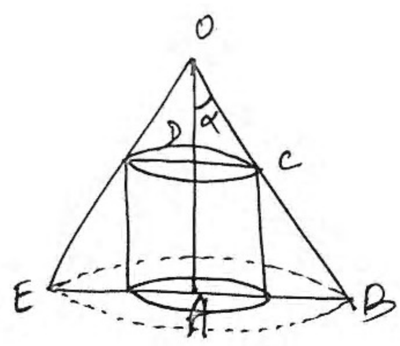
$$= \frac{\frac{8}{9} \times \frac{1}{9}}{1 - \frac{512}{729}} = \frac{72}{217} \qquad 1$$

$P(\text{C winning}) = 1 - [P(\text{A winning}) + P(\text{B winning})]$

$$= 1 - \left[\frac{81}{217} + \frac{72}{217}\right]$$

$$= 1 - \frac{153}{217} = \frac{64}{217}$$ 1

24. Correct Figure 1



Let CD = R, AD = x

$\Rightarrow$ OD = h – x

$\because$ ODC ~ ΔOAB

$$\Rightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{R}{AB} \Rightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{R}{h \tan\alpha}$$

$\Rightarrow$ R = (h – x) tan α 1

$V = \pi R^2 x$ $\frac{1}{2}$

$= \pi(h-x)^2 \tan^2 \alpha \cdot x$

$= \pi \tan^2 \alpha (h-x)^2 x$ $\frac{1}{2}$

$$\frac{dV}{dx} = \pi \tan^2 \alpha (h^2 - 4hx + 3x^2)$$ $\frac{1}{2}$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow h^2 - 4hx + 3x^2 = 0$$

$\Rightarrow (h-x)(h-3x) = 0$

$\Rightarrow x = h$ (not possible) or $x = \frac{h}{3}$ 1

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \pi \tan^2 \alpha(-4h + 6x)$$

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=h/3} = \pi \tan^2 \alpha(-2h) < 0$$ 1

$\Rightarrow$ V is maximum for $x = \frac{h}{3}$

So $V_{max} = \pi \tan^2 \alpha (h-x)^2 x$

$$= \pi \tan^2 \alpha \left(h - \frac{h}{3}\right)^2 \frac{h}{3}$$

$$= \frac{4\pi h^3}{27} \tan^2 \alpha$$ $\frac{1}{2}$

OR

$$y = \frac{4\sin x}{2+\cos x} - x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2+\cos x)4\cos x - 4\sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} - 1$$ 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x(4-\cos x)}{(2+\cos x)^2}$$ 1

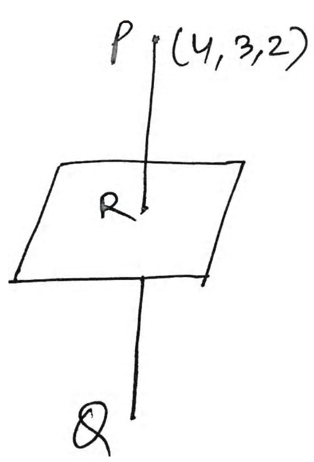
f(x) is strictly increasing for $f'(x) > 0$

i.e., $\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ 2

and f(x) is strictly decreasing for $f'(x) < 0$

i.e., $\cos x < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 1

25.



Eqn. of plane x + 2y + 3z = 2

eqn. of PR is $\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{3} = \lambda$ (let) 1

$\Rightarrow$ x = λ + 4, y = 2λ + 3, z = 3λ + 2 1

Let the co-ordinate of R be (λ + 4, 2λ + 3, 3λ + 2)

R also lies on the plane

So, $\lambda + 4 + 2(2\lambda + 3) + 3(3\lambda + 2) = 2$

$\Rightarrow \lambda = -1$ 1

So point R is (3, 1, –1) i.e., foot of perpendicular 1

let Q(α, β, γ) be the image of P

$\therefore \frac{4+\alpha}{2} = 3, \frac{3+\beta}{2} = 1, \frac{2+\gamma}{2} = -1$

$\Rightarrow \alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -4$

So Image point Q is (2, –1, –4) 1

Perpendicular distance PR = $\sqrt{14}$ 1

26. (a, b) R(c, d) $\Rightarrow$ a + d = b + c

$\because$ a + b = b + a

$\Rightarrow$ (a, b) R(a, b) $\forall$ (a, b) $\in$ A $\times$ A

$\Rightarrow$ R is reflexive $\frac{1}{2}$

(a, b) R(c, d) $\Rightarrow$ a + d = b + c

$\Rightarrow$ b + c = a + d

$\Rightarrow$ c + b = d + a

$\Rightarrow$ (c, d) R(a, b)

$\Rightarrow$ R is symmetric $1\frac{1}{2}$

For (a, b), (c, d) & (e, f) $\in$ A $\times$ A

(a, b) R(c, d) $\Rightarrow$ a + d = b + c ...(1)

(c, d) R(e, f) $\Rightarrow$ c + f = d + e ...(2)

adding (1) & (2), we get

a + d + c + f = b + c + d + e

$\Rightarrow$ a + f = b + e

$\Rightarrow$ (a, b) R(e, f)

$\therefore$ R is transitive. $1\frac{1}{2}$

Hence R is an equivalence relation. $\frac{1}{2}$

Now [3, 4] = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (9, 10)} 1