SET-3

Series GBM/2

कोड नं.
Code No. **65/2/3**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **12** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **12** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।

(ii) इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में **4** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड ब में **8** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **दो अंक** का है । खण्ड स में **11** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड द में **6** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।

(iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।

(iv) पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 3 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 3 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।

(v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of* ***29*** *questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of* ***4*** *questions of* ***one mark*** *each, Section B comprises of* ***8*** *questions of* ***two marks*** *each, Section C comprises of* ***11*** *questions of* ***four marks*** *each and Section D comprises of* ***6*** *questions of* ***six marks*** *each.*

(iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 3 questions of four marks each and 3 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

Questions number 1 to 4 carry 1 mark each.

1. बिन्दु (3, – 5, 12) की x-अक्ष से दूरी लिखिए ।

Write the distance of the point (3, – 5, 12) from x-axis.

2. मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^{2\pi} \cos^5 x \, dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{2\pi} \cos^5 x \, dx$$

3. 'k' के किस मान के लिए फलन $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 5x}{3x} + \cos x, & \text{यदि } x \neq 0 \\ k, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$, x = 0 पर संतत है ?

For what value of 'k' is the function $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 5x}{3x} + \cos x, & \text{if } x \neq 0 \\ k, & \text{if } x = 0 \end{cases}$ continuous at x = 0 ?

4. यदि $|A| = 3$ तथा $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -\dfrac{5}{3} & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$ है, तो adj A लिखिए ।

If $|A| = 3$ and $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -\dfrac{5}{3} & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$, then write the adj A.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं ।

Questions number 5 to 12 carry 2 marks each.

5. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$$

Find :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$$

6. एक कम्पनी दो प्रकार की वस्तुएँ A तथा B बनाती है जिनमें सोने और चाँदी का प्रयोग होता है । A प्रकार का एक एकक बनाने के लिए 3 ग्राम चाँदी तथा 1 ग्राम सोना चाहिए जबकि B प्रकार का एक एकक बनाने के लिए 1 ग्राम चाँदी तथा 2 ग्राम सोना चाहिए । कम्पनी अधिकतम 9 ग्राम चाँदी तथा 8 ग्राम सोना उपलब्ध करा सकती है । यदि A प्रकार की प्रत्येक इकाई पर ₹ 40 लाभ हो तथा B प्रकार की प्रत्येक इकाई पर ₹ 50 लाभ हो, तो अधिकतम लाभ के लिए रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए ।

A company produces two types of goods A and B, that require gold and silver. Each unit of type A requires 3 g of silver and 1 g of gold while that of type B requires 1 g of silver and 2 g of gold. The company can procure a maximum of 9 g of silver and 8 g of gold. If each unit of type A brings a profit of ₹ 40 and that of type B ₹ 50, formulate LPP to maximize profit.

7. यदि $P(A) = 0{\cdot}4$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0{\cdot}6$ है तथा दिया गया है कि घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र हैं, तो 'p' का मान ज्ञात कीजिए ।

If $P(A) = 0{\cdot}4$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0{\cdot}6$ and A and B are given to be independent events, find the value of 'p'.

8. एक रेखा, एक बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ से होकर जाती है तथा समतल $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) = 7$ पर लम्बवत् है । उस रेखा के कार्तीय तथा सदिश रूप के समीकरण ज्ञात कीजिए ।

A line passes through the point with position vector $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ and is perpendicular to the plane $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) = 7$. Find the equation of the line in cartesian and vector forms.

9. दर्शाइए कि फलन f जो $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$ द्वारा प्रदत्त है, सभी $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिए ह्रासमान है ।

Show that the function f given by $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$ is decreasing for all $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

10. $t = \frac{2\pi}{3}$ पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए जब $x = 10\,(t - \sin t)$ तथा $y = 12\,(1 - \cos t)$ है ।

Find $\frac{dy}{dx}$ at $t = \frac{2\pi}{3}$ when $x = 10\,(t - \sin t)$ and $y = 12\,(1 - \cos t)$.

11. यदि A तथा B कोटि 3 के ऐसे वर्ग आव्यूह हैं कि $|A| = -1$, $|B| = 3$ है, तो $|2AB|$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If A and B are square matrices of order 3 such that $|A| = -1$, $|B| = 3$, then find the value of $|2AB|$.

12. एक लम्ब-वृत्तीय बेलन की त्रिज्या r, 0·3 सेमी/से. की एकसमान दर से बढ़ रही है तथा इसकी ऊँचाई h, 0·4 सेमी/से. की दर से घट रही है । जब r = 3·5 सेमी तथा h = 7 सेमी है, तो बेलन के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए । [$\pi = \frac{22}{7}$ प्रयोग कीजिए]

The radius r of a right circular cylinder is increasing uniformly at the rate of 0·3 cm/s and its height h is decreasing at the rate of 0·4 cm/s. When r = 3·5 cm and h = 7 cm, find the rate of change of the curved surface area of the cylinder. [Use $\pi = \frac{22}{7}$]

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Questions number 13 to 23 carry 4 marks each.

13. 4 कार्ड हैं जिन पर 1 से 4 तक संख्याएँ लिखी हैं, एक कार्ड पर एक संख्या है । इनमें से दो कार्ड यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किए, निकाले गए । माना दोनों निकाले गए कार्डों पर लिखी संख्याओं का योगफल X है । X का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

There are 4 cards numbered 1 to 4, one number on one card. Two cards are drawn at random without replacement. Let X denote the sum of the numbers on the two drawn cards. Find the mean and variance of X.

14. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = 4\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ है, तो एक सदिश $\vec{c}$ ज्ञात कीजिए ताकि $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{c} = 6$ हैं ।

If $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = 4\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$, find a vector $\vec{c}$ such that $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$ and $\vec{a} \cdot \vec{c} = 6$.

15. मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_{-2}^{1} \left| x^3 - x \right| dx$$

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int e^{2x} \sin (3x + 1)\, dx$$

Evaluate :

$$\int_{-2}^{1} \left| x^3 - x \right| dx$$

OR

Find :

$$\int e^{2x} \sin(3x + 1)\, dx$$

16. एक दुकान X में, 30 टिन असली घी के तथा 40 टिन मिलावटी घी के, जो एक जैसे लगते हैं, बिक्री के लिए रखे हैं जबकि दुकान Y में, उसी प्रकार के 50 टिन असली घी के तथा 60 टिन मिलावटी घी के रखे हैं । दोनों में यादृच्छया चुनी गई एक दुकान से एक टिन घी खरीदा गया तथा मिलावट वाला पाया गया । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह दुकान Y से खरीदा गया । मिलावट को रोकने के लिए क्या उपाय किए जाएँ ?

In a shop X, 30 tins of pure ghee and 40 tins of adulterated ghee which look alike, are kept for sale while in shop Y, similar 50 tins of pure ghee and 60 tins of adulterated ghee are there. One tin of ghee is purchased from one of the randomly selected shops and is found to be adulterated. Find the probability that it is purchased from shop Y. What measures should be taken to stop adulteration ?

17. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{e^x}{(2 + e^x)(4 + e^{2x})}\, dx$$

Find :

$$\int \frac{e^x}{(2 + e^x)(4 + e^{2x})}\, dx$$

18. यदि $xy = e^{(x-y)}$ है, तो दर्शाइए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x-1)}{x(y+1)}$.

अथवा

यदि $\log y = \tan^{-1} x$ है, तो दर्शाइए कि $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

If $xy = e^{(x-y)}$, then show that $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x-1)}{x(y+1)}$.

OR

If $\log y = \tan^{-1} x$, then show that $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

19. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर दर्शाइए कि

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1+z & 1 & 1 \end{vmatrix} = xyz + yz + zx + xy.$$

अथवा

आव्यूह X ज्ञात कीजिए ताकि $X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ हो ।

Using properties of determinants show that

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1+z & 1 & 1 \end{vmatrix} = xyz + yz + zx + xy.$$

OR

Find matrix X so that $X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

20. निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को आलेख द्वारा हल कीजिए :

$Z = 105x + 90y$ का अधिकतमीकरण कीजिए

व्यवरोधों के अंतर्गत

$$\begin{aligned} x + y &\leq 50 \\ 2x + y &\leq 80 \\ x \geq 0, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Solve the following LPP graphically :

Maximise $Z = 105x + 90y$

subject to the constraints

$$\begin{aligned} x + y &\leq 50 \\ 2x + y &\leq 80 \\ x \geq 0, y &\geq 0. \end{aligned}$$

21. अवकल समीकरण $x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

Find the general solution of the differential equation

$$x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x.$$

22. सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1} x^2; \ -1 < x < 1$$

Prove that :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1} x^2; \ -1 < x < 1$$

23. सदिशों के प्रयोग से त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष A (1, 2, 3), B (2, –1, 4) तथा C (4, 5, –1) हैं ।

Using vectors, find the area of triangle ABC, with vertices A (1, 2, 3), B (2, –1, 4) and C (4, 5, –1).

खण्ड द

SECTION D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Questions number 24 to 29 carry 6 marks each.

24. समाकलन विधि के प्रयोग से एक त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक A (1, 2), B (2, 0) तथा C (4, 3) हैं ।

अथवा

समाकलन के प्रयोग से क्षेत्र $\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1 \le x + y\}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using the method of integration, find the area of the triangle ABC, coordinates of whose vertices are A (1, 2), B (2, 0) and C (4, 3).

OR

Using integration, find the area of the region $\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1 \le x + y\}$.

25. एक 34 मी. लम्बे तार को दो टुकड़ों में काटना है । एक टुकड़े से एक वर्ग तथा दूसरे से एक ऐसा आयत, जिसकी लम्बाई उसकी चौड़ाई से दुगुनी है, बनाए जाने हैं । दोनों टुकड़ों की लम्बाइयाँ क्या होंगी ताकि वर्ग तथा आयत के क्षेत्रफलों का योगफल न्यूनतम हो ?

A wire of length 34 m is to be cut into two pieces. One of the pieces is to be made into a square and the other into a rectangle whose length is twice its breadth. What should be the lengths of the two pieces, so that the combined area of the square and the rectangle is minimum ?

26. माना $A = \mathbb{R} - \{3\}$, $B = \mathbb{R} - \{1\}$ हैं । माना $f : A \to B$, $\forall\, x \in A$ के लिए $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ द्वारा परिभाषित है । दर्शाइए कि f एकैकी तथा आच्छादक है । निम्नलिखित भी ज्ञात कीजिए :

(i) x, यदि $f^{-1}(x) = 4$

(ii) $f^{-1}(7)$

अथवा

माना $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ है तथा माना $*$, A पर एक ऐसी द्विआधारी संक्रिया है जो सभी $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ के लिए $(a, b) * (c, d) = (ad + bc, bd)$ द्वारा परिभाषित है ।

(i) दर्शाइए कि $*$, A पर क्रमविनिमेय है ।

(ii) दर्शाइए कि $*$, A पर साहचर्य है ।

(iii) $*$ का A में तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए ।

Let $A = \mathbb{R} - \{3\}$, $B = \mathbb{R} - \{1\}$. Let $f : A \to B$ be defined by $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$, $\forall\ x \in A$.

Show that f is bijective. Also, find

(i) x, if $f^{-1}(x) = 4$

(ii) $f^{-1}(7)$

OR

Let $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ and let $*$ be a binary operation on A defined by $(a, b) * (c, d) = (ad + bc, bd)$ for all $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(i) Show that $*$ is commutative on A.

(ii) Show that $*$ is associative on A.

(iii) Find the identity element of $*$ in A.

27. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $x + y + z = 1$ तथा $2x + 3y + 4z = 5$ की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाता है तथा जो समतल $x - y + z = 0$ पर लम्बवत् है । अत: ज्ञात कीजिए कि इस प्रकार प्राप्त समतल, रेखा $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{5}$ को अंतर्विष्ट करता है या नहीं ।

अथवा

समतल $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + 3 = 0$ में स्थिति सदिश $\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ वाले बिन्दु P का प्रतिबिम्ब P′ ज्ञात कीजिए । अत: PP′ की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

Find the vector equation of the plane through the line of intersection of the planes $x + y + z = 1$ and $2x + 3y + 4z = 5$ which is perpendicular to the plane $x - y + z = 0$. Hence find whether the plane thus obtained contains the line $\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{5}$ or not.

OR

Find the image P′ of the point P having position vector $\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ in the plane $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + 3 = 0$. Hence find the length of PP′.

28. यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए, अत: समीकरण निकाय $x - 2y = 10,\ 2x + y + 3z = 8$ तथा $-2y + z = 7$ को हल कीजिए ।

If $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, find A^{-1} and hence solve the system of equations $x - 2y = 10,\ 2x + y + 3z = 8$ and $-2y + z = 7$.

29. अवकल समीकरण $(1 + y^2) + (x - e^{\tan^{-1} y}) \frac{dy}{dx} = 0$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि जब $x = 1$ है, तो $y = 0$ है ।

Find the particular solution of the differential equation

$(1 + y^2) + (x - e^{\tan^{-1} y}) \frac{dy}{dx} = 0$, given that $y = 0$ when $x = 1$.

QUESTION PAPER CODE 65/2/3
EXPECTED ANSWER/VALUE POINTS

SECTION A

1. $\sqrt{(-5)^2+(12)^2} = 13$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

2. $\int_0^{2\pi}\cos^5 x\,dx = 2\int_0^{\pi}\cos^5 x\,dx$ $\frac{1}{2}$

and $2\int_0^{\pi}\cos^5 x\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi}\cos^5 x\,dx = 0$ $\frac{1}{2}$

3. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{3x}+\cos x\right) = \frac{8}{3} \Rightarrow k = \frac{8}{3}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

4. adj A $= 3\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ 1

SECTION B

5. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(2)^2-(x+1)^2}}$ 1

$= \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$ 1

6. Let number of goods A = x units, number of goods B = y units

LPP is: Maximize profit, P = 40x + 50y $\frac{1}{2}$

subject to following:

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &\le 9 \\ x + 2y &\le 8 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}\right\}$$ $1\frac{1}{2}$

7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\frac{1}{2}$

$= P(A) + P(B) - P(A)\, P(B)$ as A and B are independent events $\frac{1}{2}$

$\therefore\ 0.6 = 0.4 + p - (0.4)p$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow p = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$

8. Vector form: $\vec{r} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})$ 1

Cartesian form: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-4}{-5}$ 1

9. $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{1 + (\sin x + \cos x)^2}$ 1

$1 + (\sin x + \cos x)^2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

and $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x < \sin x \Rightarrow \cos x - \sin x < 0$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ is decreasing in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{1}{2}$

10. $\frac{dy}{dt} = 12 \sin t,\ \frac{dx}{dt} = 10\ (1 - \cos t)$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6}{5} \times \frac{\sin t}{1 - \cos t}$ $\frac{1}{2}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t = \frac{2\pi}{3}} = \frac{6}{5\sqrt{3}}$ $\frac{1}{2}$

11. $|2AB| = 2^3 \times |A| \times |B|$ 1

$= 8 \times (-1) \times 3 = -24$ 1

12. CSA of cylinder, $A = 2\pi rh$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi\left[r\frac{dh}{dt} + h\frac{dr}{dt}\right]$ 1

$$= 2\times\frac{22}{7}\left[3.5\times(-0.4)+7(0.3)\right] = 4.4\ \text{cm}^2/\text{s}$$ 1

$\therefore$ CSA is increasing at the rate of 4.4 cm^2/s

SECTION C

13. X can take the values 3, 4, 5, 6, 7 1

$\therefore$ X :	3	4	5	6	7
P(X) :	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
=	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
X.P(X) :	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{7}{6}$
X^2.P(X) :	$\frac{9}{6}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{25}{3}$	$\frac{36}{6}$	$\frac{49}{6}$

1

$$\therefore\ \text{Mean} = \Sigma X\cdot P(X) = \frac{30}{6} = 5$$ 1

$$\text{Variance} = \Sigma X^2\cdot P(X) - [\Sigma X\cdot P(X)]^2 = \frac{160}{6} - 25 = \frac{5}{3}$$ 1

14. Let $\vec{c} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\ ;\ \vec{a}\cdot\vec{c} = 6 \Rightarrow 2x+y-z = 6$ 1

$$\text{Now,}\quad \vec{a}\times\vec{c} = \vec{b} \Rightarrow \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 1 & -1\\ x & y & z\end{vmatrix} = 4\hat{i}-7\hat{j}+\hat{k}$$ $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow\quad \hat{i}(z+y)-\hat{j}(2z+x)+\hat{k}(2y-x) = 4\hat{i}-7\hat{j}+\hat{k}$$

$$\Rightarrow\quad z+y = 4,\ 2z+x = 7,\ 2y-x = 1$$ 1

Solving and getting x = 3, y = 2, z = 2 $1\frac{1}{2}$

$$\vec{c} = 3\hat{i}+2\hat{i}+2\hat{k}$$

15. $\int_{-2}^{1}|x^3 - x|\,dx = \int_{-2}^{-1} -(x^3 - x)\,dx + \int_{-1}^{0}(x^3 - x)\,dx - \int_{0}^{1}(x^3 - x)dx$ $\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$$= \left|\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{-1} + \left|\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0} - \left|\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1} \qquad 1$$

$$= \frac{11}{4} \qquad 1$$

OR

$$I = \int e^{2x} \sin(3x+1)\,dx$$

$$= \sin(3x+1)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int 3\cos(3x+1)\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\cdot\sin(3x+1) - \frac{3}{2}\left[\cos(3x+1)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int -3\sin(3x+1)\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx\right] \qquad 1$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\sin(3x+1) - \frac{3}{4}\cos(3x+1)\cdot e^{2x} - \frac{9}{4}I + c$$

$$\Rightarrow \frac{13}{4}I = \frac{e^{2x}}{4}[2\sin(3x+1) - 3\cos(3x+1)] + c \qquad 1$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{2x}}{13}[2\sin(3x+1) - 3\cos(3x+1)] + c \qquad \frac{1}{2}$$

16. E_1 = Ghee purchased from shop X

E_2 = Ghee purchased from shop Y $\quad$ 1

A = Getting adultered ghee

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2},\ P(A/E_1) = \frac{4}{7},\ P(A/E_2) = \frac{6}{11} \qquad 1$$

$$P(E_2/A) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{6}{11}}{\frac{1}{2}\times\frac{6}{11}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}} = \frac{21}{43} \qquad 1$$

II part: Stringent punishment for the adultrators or any suitable measure $\quad$ 1

17. $I = \int \frac{dt}{(2+t)(4+t^2)}$ where $e^x = t$ $\frac{1}{2}$

Now, $\frac{1}{(2+t)(4+t^2)} = \frac{1}{8(2+t)} - \frac{1}{8}\left(\frac{t-2}{4+t^2}\right)$ $1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int \frac{dt}{(2+t)(4+t^2)} = \frac{1}{8}\log|2+t| - \frac{1}{16}\log|4+t^2| + \frac{1}{8}\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + c$ $1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int \frac{e^x dx}{(2+e^x)(4+e^{2x})} = \frac{1}{8}\log|2+e^x| - \frac{1}{16}\log|4+e^{2x}| + \frac{1}{8}\tan^{-1}\left(\frac{e^x}{2}\right) + c$ $\frac{1}{2}$

18. $x\frac{dy}{dx} + y = e^{x-y}\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)$ 1

$= xy\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)$ 1

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy - y}{x + xy} = \frac{y(x-1)}{x(1+y)}$ 1+1

OR

Differentiating the given expression w.r.t. x, we get

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ 1

$\Rightarrow (1+x^2)\frac{dy}{dx} = y$ 1

diff. again w.r.t. x,

$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(2x) = \frac{dy}{dx}$ $1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{1}{2}$

19. **Note:** Since a negative sign is missing in the question, so the equality can not be proved. So, 4 marks may be given for genuine attempt.

OR

Let $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 1

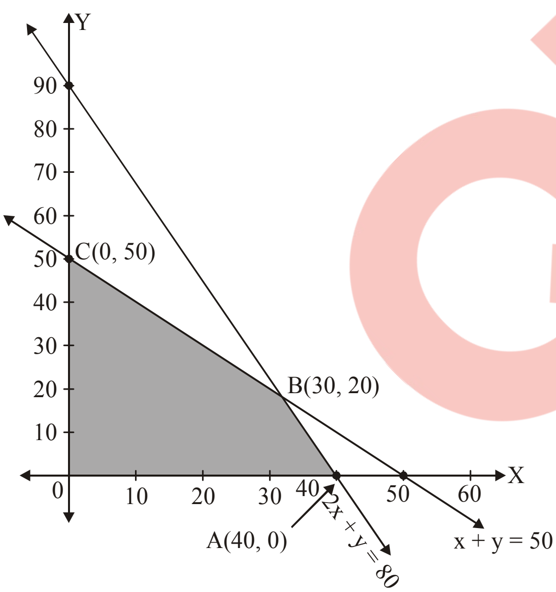
then, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+4b & 2a+5b & 3a+6b \\ c+4d & 2c+5d & 3c+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ 1

equating and solving to get $a = 1,\ b = -2,\ c = 2,\ d = 0$ $1\frac{1}{2}$

$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}$

20.



For correct graph of 2 lines 2

For correct shading 1

Z(O) = 0

Z(A) = 4200

Z(B) = 4950

Z(C) = 4500

$\therefore$ Maximum value of Z is 4950

at $x = 30,\ y = 20$ 1

21. Given differential equation can be written as

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{1}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$ $\frac{1}{2}$

Put $y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ 1

$\therefore\ v + x\frac{dv}{dx} = v + \frac{1}{\cos v}$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int \cos v\, dv = \int \frac{dx}{x}$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin v = \log|x| + c$ 1

$\Rightarrow \sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log|x| + c$ $\frac{1}{2}$

22. Put $x^2 = \cos 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\cos^{-1} x^2$ 1

$\text{LHS} = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\cos^2\theta} + \sqrt{2\sin^2\theta}}{\sqrt{2\cos^2\theta} - \sqrt{2\sin^2\theta}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)$ $1\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\right) = \frac{\pi}{4} + \theta$ 1

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1}x^2,\ -1 < x < 1 = \text{RHS}$ $\frac{1}{2}$

23. $\overrightarrow{AB} = \hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k},\ \overrightarrow{AC} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Area of $\Delta ABC = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

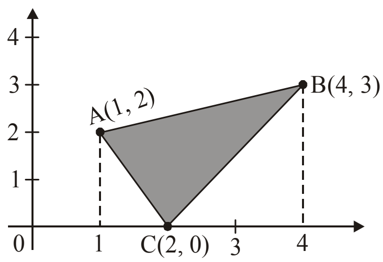
$= \frac{1}{2}$ magnitude of $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ 1

$= \frac{1}{2}|9\hat{i}+7\hat{j}+12\hat{k}|$ 1

$= \frac{1}{2}\sqrt{81+49+144} = \frac{1}{2}\sqrt{274}$ sq.units 1

SECTION D

24. Correct figure 1



Equation of AB : $y = \frac{x+5}{3}$

Equation of BC: $y = \frac{3x}{2} - 3$ $1\frac{1}{2}$

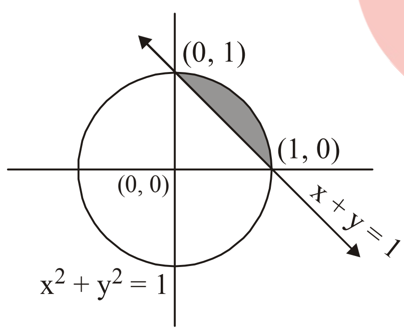
Equation of AC: $y = 4 - 2x$

$\therefore$ Area (A) $= \int_1^4 \frac{x+5}{3}dx - \int_1^2 (4-2x)dx - \int_2^4 \left(\frac{3x}{2} - 3\right)dx$ 1

$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} + 5x\right]_1^4 - \left[4x - x^2\right]_1^2 - \left[\frac{3x^2}{4} - 3x\right]_2^4$ $1\frac{1}{2}$

$= \frac{15}{2} - 1 - 3 = \frac{7}{2}$ sq.units 1

OR



For correct figure

For correct shading $1+\frac{1}{2}$

$A = \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} - (1-x)\right)dx$ $1\frac{1}{2}$

$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_0^1 - \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$ 2

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(1) - \frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$ sq.units 1

25. Let length of one piece be x m, then length of the other piece = (34 – x) m

$\therefore$ Side of square is $\frac{x}{4}$ m then width of rectangle will be $\frac{34-x}{6}$ m. 1

Now, Area (A) = $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{34-x}{6}\right)^2$ 1

$\Rightarrow \frac{dA}{dx} = \frac{x}{8} - \frac{1}{9}(34-x)$ 1

$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow x = 16$ 1

also, $\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} > 0$ 1

so, A is minimum when x = 16

$\therefore$ Lengths of the two pieces are 16 m and 18 m. 1

26. Let $x_1, x_2 \in A$ and $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \frac{x_1 - 2}{x_1 - 3} = \frac{x_2 - 2}{x_2 - 3} \Rightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 3) = (x_1 - 3)(x_2 - 2)$

$\Rightarrow x_1x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 6 = x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

Hence f is a one-one function 2

Let $y = \frac{x-2}{x-3}$ for $y \in R - \{1\}$

$\Rightarrow x = \frac{3y-2}{y-1}; y \neq 1$

$\therefore \forall y \in R - \{1\}, x \in R - \{3\}$

i.e. Range of f = co-domain of f.

Hence f is onto and so bijective. 2

Also, $f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x-1}; x \neq 1$ 1

Now, $f^{-1}(x) = 4 \Rightarrow \frac{3x-2}{x-1} = 4 \Rightarrow x = 2$ $\frac{1}{2}$

and $f^{-1}(7) = \frac{19}{6}$ $\frac{1}{2}$

OR

(i) (a, b) * (c, d) = (ad + bc, bd)

Now, (c, d) * (a, b) = (cb + da, db) = (ad + bc, bd) = (a, b) * (c, d)

$\Rightarrow$ * is commutative. 2

(ii) [(a, b) * (c, d)] * (e, f) = (ad + bc, bd) * (e, f) = (adf + bcf + bde, bdf)

(a,b) * [(c, d) * (e, f)] = (a, b) * (cf + de, df) = (adf + bcf + bde, bdf)

$\Rightarrow$ * is associative. 2

Let (e_1, e_2) be the identity element of A.

$\Rightarrow (a, b) * (e_1, e_2) = (a, b) = (e_1, e_2) * (a, b)$

$\Rightarrow (ae_2 + be_1, be_2) = (a, b) = (e_1 b + e_2 a, e_2 b)$

$\Rightarrow ae_2 + be_1 = a$ and $be_2 = b \Rightarrow e_1 = 0, e_2 = 1$

$\Rightarrow$ (0, 1) is the identity on A. 2

27. Equation of the plane through the intersection of planes is

$(x + y + z - 1) + \lambda(2x + 3y + 4z - 5) = 0$ 1

$\Rightarrow (1 + 2\lambda)x + (1 + 3\lambda)y + (1 + 4\lambda)z - (1 + 5\lambda) = 0$ ....(i)

This plane is perpendicular to $x - y + z = 0$

$\therefore 1(1 + 2\lambda) - 1(1 + 3\lambda) + 1(1 + 4\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{3}$ 2

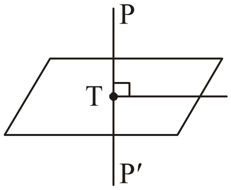
$\therefore$ Equation of plane is

$(x + y + z - 1) - \frac{1}{3}(2x + 3y + 4z - 5) = 0 \Rightarrow x - z + 2 = 0.$ 1

Vector form of plane is $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{k}) + 2 = 0$ 1

Yes, line lies on the plane as (–2, 3, 0) satisfies $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{k}) + 2 = 0$ and normal to plane is perpendicular to the given line as 1(5) + 0(4) – 1(5) = 0 1

OR



Let PT is perpendicular to given plane.

Let p.v. of T is $\vec{b}_1 = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

$\therefore \ \overrightarrow{PT} = (a-1)\hat{i} + (b-3)\hat{j} + (c-4)\hat{k}$ 1

$\overrightarrow{PT} \,||\, \vec{n}$ (nromal) $\therefore \ \dfrac{a-1}{-2} = \dfrac{b-3}{1} = \dfrac{c-4}{-1} = \lambda$

$\Rightarrow a = -2\lambda + 1, \ b = \lambda + 3, \ c = -\lambda + 4$ 1

$\therefore \ \vec{b}_1 = (-2\lambda+1)\hat{i} + (\lambda+3)\hat{j} + (-\lambda+4)\hat{k}$ $\frac{1}{2}$

$\vec{b}_1$ lies on plane

$\therefore \ [(-2\lambda+1)\hat{i} + (\lambda+3)\hat{j} + (-\lambda+4)\hat{k}]\cdot(-2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 3$

$\Rightarrow \lambda = 1$ 1

$\therefore \ \vec{b}_1 = -\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ $\frac{1}{2}$

Let p.v. of P′ is $\vec{c}_1 = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

Using section formula, $\vec{c}_1 = -3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$ 1

Also, $PP' = \sqrt{24}$ or $2\sqrt{6}$ 1

28. $|A| = 11 \neq 0$, A^{-1} will exist 1

$$\left.\begin{array}{lll} A_{11} = 7, & A_{21} = 2, & A_{31} = -6 \\ A_{12} = -2, & A_{22} = 1, & A_{32} = -3 \\ A_{13} = -4, & A_{23} = 2, & A_{33} = 5 \end{array}\right\}$$ 2

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ $\frac{1}{2}$

Given sysem of equations can be written as AX = B, where

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$ $\frac{1}{2}$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

$\therefore\ x = 4,\ y = -3,\ z = 1$ $\frac{1}{2}$

29. Given differential equation can be written as

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2}$$ 1

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{dy}{1+y^2}} = e^{\tan^{-1}y}$$ 1

Solution is given by

$$xe^{\tan^{-1}y} = \int \frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2} \times e^{\tan^{-1}y}\, dy = \int \frac{e^{2\tan^{-1}y}}{1+y^2}\, dy$$ 1

$$\Rightarrow\ xe^{\tan^{-1}y} = \frac{e^{2\tan^{-1}y}}{2} + c$$ $1\frac{1}{2}$

when $x = 1,\ y = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$ 1

$\therefore$ Solution is given by $xe^{\tan^{1}y} = \frac{1}{2}e^{2\tan^{-1}y} + \frac{1}{2}$ or $x = \frac{1}{2}(e^{\tan^{-1}y} + e^{-\tan^{-1}y})$ $\frac{1}{2}$